二弧传递的边本原图

路在平

南開大學組合數學中心

第十届海峡两岸图论与组合数学研讨会

台湾中兴大学　2019.8.18-23

置换群

置换群

置换群$G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$. 点稳定子$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$;

置换群

置换群$G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$. 点稳定子$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$; 轨道$\alpha^G := \{\alpha^g \mid g \in G\}$.

置换群

置换群$G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$. 点稳定子$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$; 轨道$\alpha^G := \{\alpha^g \mid g \in G\}$.
（$G_{\alpha^g} = G_\alpha^g$, $|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$.）

置换群

置换群$G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$. 点稳定子$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$; 轨道$\alpha^G := \{\alpha^g \mid g \in G\}$.
（$G_{\alpha^g} = G_\alpha^g$, $|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$.）

传递：$\forall \beta \in \Omega, \exists g \in G$使得$\beta = \alpha^g$, 即$\Omega = \alpha^G$.

置换群

置换群$G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$. **点稳定子**$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$; **轨道**$\alpha^G := \{\alpha^g \mid g \in G\}$.
（$G_{\alpha^g} = G_\alpha^g$，$|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$.）

传递：$\forall \beta \in \Omega, \exists g \in G$使得$\beta = \alpha^g$, 即$\Omega = \alpha^G$.

半正则：$G_\beta = 1, \forall \beta \in \Omega$; **正则**：传递且半正则.

置换群

置换群$G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$. 点稳定子$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$; 轨道$\alpha^G := \{\alpha^g \mid g \in G\}$.
($G_{\alpha^g} = G_\alpha^g$, $|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$.)

传递: $\forall \beta \in \Omega, \exists g \in G$使得$\beta = \alpha^g$, 即$\Omega = \alpha^G$.

半正则: $G_\beta = 1, \forall \beta \in \Omega$; 正则: 传递且半正则.

Frobenius: G传递, $G_\alpha \neq 1$在$\Omega \setminus \{\alpha\}$上半正则.

置换群

置换群$G \le \mathrm{Sym}(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$. 点稳定子$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$; 轨道$\alpha^G := \{\alpha^g \mid g \in G\}$.
（$G_{\alpha^g} = G_\alpha^g$, $|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$.）

传递：$\forall \beta \in \Omega, \exists g \in G$使得$\beta = \alpha^g$, 即$\Omega = \alpha^G$.

半正则：$G_\beta = 1, \forall \beta \in \Omega$; 正则：传递且半正则.

Frobenius：G传递, $G_\alpha \ne 1$在$\Omega \setminus \{\alpha\}$上半正则.

2-传递：G传递, G_α在$\Omega \setminus \{\alpha\}$上传递.（$\Longrightarrow$ 几乎单的或仿射的.）

置换群

置换群$G \le \mathrm{Sym}(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$. 点稳定子$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$; 轨道$\alpha^G := \{\alpha^g \mid g \in G\}$.
（$G_{\alpha^g} = G_\alpha^g$, $|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$.）

传递：$\forall \beta \in \Omega, \exists g \in G$使得$\beta = \alpha^g$, 即$\Omega = \alpha^G$.

半正则：$G_\beta = 1, \forall \beta \in \Omega$; 正则：传递且半正则.

Frobenius：G传递, $G_\alpha \neq 1$在$\Omega \setminus \{\alpha\}$上半正则.

2-传递：G传递, G_α在$\Omega \setminus \{\alpha\}$上传递.（$\Longrightarrow$ 几乎单的或仿射的.）

本原：G传递, G_α是G的极大子群.

置换群

置换群$G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$. 点稳定子$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$; 轨道$\alpha^G := \{\alpha^g \mid g \in G\}$.
（$G_{\alpha^g} = G_\alpha^g$, $|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$.）

- 传递：$\forall \beta \in \Omega, \exists g \in G$使得$\beta = \alpha^g$, 即$\Omega = \alpha^G$.
- 半正则：$G_\beta = 1, \forall \beta \in \Omega$; 正则：传递且半正则.
- ***Frobenius***：G传递, $G_\alpha \neq 1$在$\Omega \setminus \{\alpha\}$上半正则.
- 2-传递：G传递, G_α在$\Omega \setminus \{\alpha\}$上传递.（$\Longrightarrow$ 几乎单的或仿射的.）
- 本原：G传递, G_α是G的极大子群.（2-传递$\Longrightarrow$ 本原.）

引理

设$1 \neq N \trianglelefteq G$. 若$G$是本原的, 则$N$是正则的或者$\mathbf{N}_N(N_\alpha) = N_\alpha$.

置换群$G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$. 点稳定子$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$; 轨道$\alpha^G := \{\alpha^g \mid g \in G\}$.
($G_{\alpha^g} = G_\alpha^g$, $|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$.)

传递：$\forall \beta \in \Omega, \exists g \in G$使得$\beta = \alpha^g$, 即$\Omega = \alpha^G$.

半正则：$G_\beta = 1, \forall \beta \in \Omega$; 正则：传递且半正则.

Frobenius：G传递, $G_\alpha \neq 1$在$\Omega \setminus \{\alpha\}$上半正则.

2-传递：G传递, G_α在$\Omega \setminus \{\alpha\}$上传递.（$\Longrightarrow$ 几乎单的或仿射的.）

本原：G传递, G_α是G的极大子群.（2-传递$\Longrightarrow$ 本原.）

引理

设$1 \neq N \trianglelefteq G$. 若$G$是本原的, 则$N$是正则的或者$\mathbf{N}_N(N_\alpha) = N_\alpha$. 若$G$是2-传递的, 则

- N是本原的, 或
- G是仿射的, N是可解的*Frobinus*群, $N_\alpha \leq \mathbf{Z}(G_\alpha)$或$G \leq \mathrm{AGL}(1, q)$, 且$N_\alpha$循环.

置换群$G \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$, $\alpha \in \Omega$. 点稳定子$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$; 轨道$\alpha^G := \{\alpha^g \mid g \in G\}$.
（$G_{\alpha^g} = G_\alpha^g$, $|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$.）

传递：$\forall \beta \in \Omega, \exists g \in G$使得$\beta = \alpha^g$, 即$\Omega = \alpha^G$.

半正则：$G_\beta = 1, \forall \beta \in \Omega$; 正则：传递且半正则.

Frobenius：G传递, $G_\alpha \neq 1$在$\Omega \setminus \{\alpha\}$上半正则.

2-传递：G传递, G_α在$\Omega \setminus \{\alpha\}$上传递.（$\Longrightarrow$ 几乎单的或仿射的.）

本原：G传递, G_α是G的极大子群.（2-传递$\Longrightarrow$ 本原.）

引理

设$1 \neq N \trianglelefteq G$. 若$G$是本原的, 则$N$是正则的或者$\mathbf{N}_N(N_\alpha) = N_\alpha$. 若$G$是2-传递的, 则

- N是本原的, 或
- G是仿射的, N是可解的*Frobinus*群, $N_\alpha \leq \mathbf{Z}(G_\alpha)$或$G \leq \mathrm{AGL}(1, q)$, 且$N_\alpha$循环.

拟本原：G的任意极小正规子群传递.（$\Longrightarrow$ G 至多有两个极小正规子群.）

O’Nan-Scott定理

本原置换群（O’Nan-Scott, 1980; Cameron, 1981; Liebeck-Praeger-Saxl, 1988）**；拟本原置换群**（Praeger, 1993,1997）**.**

本原置换群（O'Nan-Scott, 1980; Cameron, 1981; Liebeck-Praeger-Saxl, 1988）；拟本原置换群（Praeger, 1993,1997）.

拟本原群的O'Nan-Scott类型

HA, HS, HC, TW, AS, SD, CD, PA.

本原置换群（O'Nan-Scott, 1980; Cameron, 1981; Liebeck-Praeger-Saxl, 1988）；拟本原置换群（Praeger, 1993,1997）.

拟本原群的O'Nan-Scott类型

HA, HS, HC, TW, AS, SD, CD, PA.

- HS和HC型：两个同构且正则的极小正规子群；
- 其它六型：唯一极小正规子群.
- HA, HS, HC型必本原.

本原置换群（O'Nan-Scott, 1980; Cameron, 1981; Liebeck-Praeger-Saxl, 1988）；拟本原置换群（Praeger, 1993,1997）.

拟本原群的O'Nan-Scott类型

HA, HS, HC, TW, AS, SD, CD, PA.

- HS和HC型：两个同构且正则的极小正规子群；
- 其它六型：唯一极小正规子群.
- HA, HS, HC型必本原.

令soc(G)为G的基柱（socle），即G的极小正规子群的乘积.

本原置换群（O'Nan-Scott, 1980; Cameron, 1981; Liebeck-Praeger-Saxl, 1988）；拟本原置换群（Praeger, 1993,1997）.

拟本原群的O'Nan-Scott类型

HA, HS, HC, TW, AS, SD, CD, PA.

- HS和HC型：两个同构且正则的极小正规子群；
- 其它六型：唯一极小正规子群.
- HA, HS, HC型必本原.

令soc(G)为G的基柱（socle），即G的极小正规子群的乘积.

- HA型：soc$(G) = \mathbb{Z}_p^k$；

本原置换群（O'Nan-Scott, 1980; Cameron, 1981; Liebeck-Praeger-Saxl, 1988）；拟本原置换群（Praeger, 1993,1997）.

拟本原群的O'Nan-Scott类型

HA, HS, HC, TW, AS, SD, CD, PA.

- HS和HC型：两个同构且正则的极小正规子群；
- 其它六型：唯一极小正规子群.
- HA, HS, HC型必本原.

令soc(G)为G的基柱（socle），即G的极小正规子群的乘积.

- HA型：soc$(G) = \mathbb{Z}_p^k$；
- AS型：soc(G)非交换单群；

O’Nan-Scott定理

本原置换群（O’Nan-Scott, 1980; Cameron, 1981; Liebeck-Praeger-Saxl, 1988）；拟本原置换群（Praeger, 1993,1997）.

拟本原群的O’Nan-Scott类型

HA, HS, HC, TW, AS, SD, CD, PA.

- HS和HC型：两个同构且正则的极小正规子群；
- 其它六型：唯一极小正规子群.
- HA, HS, HC型必本原.

令$\mathsf{soc}(G)$为G的基柱（socle），即G的极小正规子群的乘积.

- HA型：$\mathsf{soc}(G) = \mathbb{Z}_p^k$；
- AS型：$\mathsf{soc}(G)$非交换单群；
- 本原PA型：$\mathsf{soc}(G) = T_1 \times \cdots \times T_k$，非交换单群$T_1 \cong \cdots \cong T_k$，

$$\mathsf{soc}(G)_\alpha = (T_1)_\alpha \times \cdots \times (T_k)_\alpha.$$

O'Nan-Scott定理与二弧传递图

简单连通图$\Gamma = (V, E)$, 度数不小于3, $G \leq \mathsf{Aut}\Gamma$, $\{u, v\} \in E$.

简单连通图$\Gamma = (V, E)$, 度数不小于3, $G \le \mathsf{Aut}\Gamma$, $\{u, v\} \in E$.

2-弧: (u_0, u_1, u_2), $\{u_0, u_1\}$, $\{u_1, u_2\} \in E$, $u_0 \ne u_2$.

简单连通图$\Gamma=(V,E)$, 度数不小于3, $G\leq \mathsf{Aut}\Gamma$, $\{u,v\}\in E$.

2-弧: (u_0,u_1,u_2), $\{u_0,u_1\}$, $\{u_1,u_2\}\in E$, $u_0\neq u_2$.

2-弧传递: G在2-弧集合上的作用是传递的.

简单连通图$\Gamma=(V,E)$, 度数不小于3, $G\le \mathrm{Aut}\Gamma$, $\{u,v\}\in E$.

2-弧: (u_0,u_1,u_2), $\{u_0,u_1\}$, $\{u_1,u_2\}\in E$, $u_0\ne u_2$.

2-弧传递: G在2-弧集合上的作用是传递的.

定理 (Praeger, 1993, 1997)

设Γ是$(G,2)$-弧传递的. 若G^V是拟本原的, 则G是下列类型之一: HA, AS, PA, TW.

简单连通图$\Gamma=(V,E)$, 度数不小于3, $G\leq \mathrm{Aut}\Gamma$, $\{u,v\}\in E$.

2-弧: (u_0,u_1,u_2), $\{u_0,u_1\}$, $\{u_1,u_2\}\in E$, $u_0\neq u_2$.

2-弧传递: G在2-弧集合上的作用是传递的.

定理 (Praeger, 1993, 1997)

设Γ是$(G,2)$-弧传递的. 若G^V是拟本原的, 则G是下列类型之一: HA, AS, PA, TW.

定理 (Praeger, 1993; Giudici-Li-Praeger, 2006)

设Γ是$(G,2)$-弧传递的的二部图, 令G^+表示G的保持二部划分为U和W的子群. 设G的每个极小正规子群在V上至多（于是恰好）有两个轨道. 若G不是完全二部图, 则G^+在U和W上的作用都忠实,

简单连通图$\Gamma = (V, E)$, 度数不小于3, $G \leq \mathrm{Aut}\Gamma$, $\{u, v\} \in E$.

2-弧: (u_0, u_1, u_2), $\{u_0, u_1\}$, $\{u_1, u_2\} \in E$, $u_0 \neq u_2$.

2-弧传递: G在2-弧集合上的作用是传递的.

定理 (Praeger, 1993, 1997)

设Γ是$(G, 2)$-弧传递的. 若G^V是拟本原的, 则G是下列类型之一: HA, AS, PA, TW.

定理 (Praeger, 1993; Giudici-Li-Praeger, 2006)

设Γ是$(G, 2)$-弧传递的的二部图, 令G^+表示G的保持二部划分为U和W的子群. 设G的每个极小正规子群在V上至多（于是恰好）有两个轨道. 若G不是完全二部图, 则G^+在U和W上的作用都忠实, 且下列之一成立:

- G^+在U和W都是是拟本原的且具有相同类型: HA, AS, PA, TW;

简单连通图$\Gamma=(V,E)$, 度数不小于3, $G\leq \mathrm{Aut}\Gamma$, $\{u,v\}\in E$.

2-弧：(u_0,u_1,u_2), $\{u_0,u_1\}$, $\{u_1,u_2\}\in E$, $u_0\neq u_2$.

2-弧传递：G在2-弧集合上的作用是传递的.

定理 (Praeger, 1993, 1997)

设Γ是$(G,2)$-弧传递的. 若G^V是拟本原的, 则G是下列类型之一：HA, AS, PA, TW.

定理 (Praeger, 1993; Giudici-Li-Praeger, 2006)

设Γ是$(G,2)$-弧传递的的二部图, 令G^+表示G的保持二部划分为U和W的子群. 设G的每个极小正规子群在V上至多（于是恰好）有两个轨道. 若G不是完全二部图, 则G^+在U和W上的作用都忠实，且下列之一成立：

- G^+在U和W都是是拟本原的且具有相同类型：HA, AS, PA, TW;
- G有极小正规子群$M_1\times M_2$满足：M_1和M_2在G中共轭, 它们是G^+ 的极小正规子群但在U 和W上都不传递.

简单连通图$\Gamma = (V, E)$, 度数不小于3, $G \leq \mathsf{Aut}\Gamma$, $\{u, v\} \in E$.

2-弧: (u_0, u_1, u_2), $\{u_0, u_1\}$, $\{u_1, u_2\} \in E$, $u_0 \neq u_2$.

2-弧传递: G在2-弧集合上的作用是传递的.

定理 (Praeger, 1993, 1997)

设Γ是$(G, 2)$-弧传递的. 若G^V是拟本原的, 则G是下列类型之一: HA, AS, PA, TW.

定理 (Praeger, 1993; Giudici-Li-Praeger, 2006)

设Γ是$(G, 2)$-弧传递的的二部图, 令G^+表示G的保持二部划分为U和W的子群. 设G的每个极小正规子群在V上至多（于是恰好）有两个轨道. 若G不是完全二部图, 则G^+在U和W上的作用都忠实, 且下列之一成立:

- G^+在U和W都是是拟本原的且具有相同类型: HA, AS, PA, TW;
- G有极小正规子群$M_1 \times M_2$满足: M_1和M_2在G中共轭, 它们是G^+ 的极小正规子群但在U 和W上都不传递.

定理 (Praeger, 1993)

若Γ是$(G, 2)$-弧传递图, 则Γ是上述两个定理所描述图的正规覆盖.

边本原图

简单连通图$\Gamma = (V, E)$, $G \leq \mathsf{Aut}\Gamma$, $\{u, v\} \in E$.

边本原图

简单连通图$\Gamma=(V,E)$, $G\leq \mathrm{Aut}\Gamma$, $\{u,v\}\in E$.

点传递：G^V传递；**边传递**：G^E传递；**弧传递**：G在**弧**集上传递.

边本原图

简单连通图$\Gamma = (V, E)$, $G \leq \mathrm{Aut}\Gamma$, $\{u, v\} \in E$.

点传递：G^V传递；**边传递**：G^E传递；**弧传递**：G在**弧**集上传递.

边本原：G^E传递且$G_{\{u,v\}} := \{g \mid \{u, v\}^g = \{u, v\}\}$在$G$中极大

边本原图

简单连通图$\Gamma = (V, E)$, $G \leq \mathrm{Aut}\Gamma$, $\{u, v\} \in E$.

点传递：G^V传递；**边传递**：G^E传递；**弧传递**：G在**弧**集上传递.

边本原：G^E传递且$G_{\{u,v\}} := \{g \mid \{u, v\}^g = \{u, v\}\}$在$G$中极大

（$\Longrightarrow$星图, 或弧传递因而$G_{\{u,v\}} = G_{uv}.2$）.

边本原图

简单连通图$\Gamma = (V, E)$, $G \le \mathrm{Aut}\Gamma$, $\{u, v\} \in E$.

点传递：G^V传递；**边传递**：G^E传递；**弧传递**：G在**弧**集上传递.

边本原：G^E传递且$G_{\{u,v\}} := \{g \mid \{u, v\}^g = \{u, v\}\}$在$G$中极大

（$\Longrightarrow$星图, 或弧传递因而$G_{\{u,v\}} = G_{uv}.2$）.

构造

设$K \lessdot G$和$H \le G$满足：$|K : (H \cap K)| = 2, \cap_{g \in G} H^g = 1$. 取$x \in K \setminus (H \cap K)$.

边本原图

简单连通图$\Gamma=(V,E)$, $G\le \mathsf{Aut}\Gamma$, $\{u,v\}\in E$.

点传递：G^V传递；**边传递**：G^E传递；**弧传递**：G在**弧**集上传递.

边本原：G^E传递且$G_{\{u,v\}}:=\{g\mid \{u,v\}^g=\{u,v\}\}$在$G$中极大

（$\Longrightarrow$星图, 或弧传递因而$G_{\{u,v\}}=G_{uv}.2$）.

构造

设$K\lessdot G$和$H\le G$满足：$|K:(H\cap K)|=2, \cap_{g\in G}H^g=1$. 取$x\in K\setminus(H\cap K)$.

定义图$\mathsf{Cos}(G,H,HxH)$:

点集$[G:H]=\{Hg\mid g\in G\}$, 边集$\{\{Hx,Hy\}\mid x,y\in G,\ yx^{-1}\in HxH\}$.

边本原图

简单连通图$\Gamma=(V,E)$, $G\le \mathrm{Aut}\Gamma$, $\{u,v\}\in E$.

点传递：G^V传递；**边传递**：G^E传递；**弧传递**：G在弧集上传递.

边本原：G^E传递且$G_{\{u,v\}}:=\{g\mid \{u,v\}^g=\{u,v\}\}$在$G$中极大

（$\Longrightarrow$星图, 或弧传递因而$G_{\{u,v\}}=G_{uv}.2$）.

构造

设$K\lessdot G$和$H\le G$满足：$|K:(H\cap K)|=2, \cap_{g\in G}H^g=1$. 取$x\in K\setminus(H\cap K)$.

定义图$\mathrm{Cos}(G,H,HxH)$:

点集$[G:H]=\{Hg\mid g\in G\}$, 边集$\{\{Hx,Hy\}\mid x,y\in G,\ yx^{-1}\in HxH\}$.

则$\mathrm{Cos}(G,H,HxH)$是G-边本原的, 其中

$$g:[G:H]\longrightarrow[G:H];\ \ Hx\longmapsto Hxg.$$

边本原图

简单连通图$\Gamma = (V, E)$, $G \leq \mathrm{Aut}\Gamma$, $\{u, v\} \in E$.

点传递：G^V传递；**边传递**：G^E传递；**弧传递**：G在弧集上传递.

边本原：G^E传递且$G_{\{u,v\}} := \{g \mid \{u, v\}^g = \{u, v\}\}$在$G$中极大

（$\Longrightarrow$星图, 或弧传递因而$G_{\{u,v\}} = G_{uv}.2$）.

构造

设$K < G$和$H \leq G$满足：$|K : (H \cap K)| = 2$, $\cap_{g \in G} H^g = 1$. 取$x \in K \setminus (H \cap K)$.

定义图$\mathrm{Cos}(G, H, HxH)$:

点集$[G : H] = \{Hg \mid g \in G\}$, 边集$\{\{Hx, Hy\} \mid x, y \in G,\ yx^{-1} \in HxH\}$.

则$\mathrm{Cos}(G, H, HxH)$是G-边本原的, 其中

$$g : [G : H] \longrightarrow [G : H];\ \ Hx \longmapsto Hxg.$$

例子

- **Higman-Sims群HS:** 22度100阶秩三图; **Rudvalis群Ru:** 2304度4060 阶秩三图;
- $\mathrm{PSU}(3, 5).2$, $\mathrm{J}_2.2$, $\mathrm{G}_2(4).2$, $\mathrm{Suz}.2$, $\mathrm{M}_{22}.2$, $\mathrm{McL}.2$ 等;
- 3度**(Weiss, 1973):** $\mathrm{PGL}(2, 7)$, $\mathrm{PSL}(2, 17)$, $\mathrm{P\Gamma L}(2, 9)$;
- 4度**(Guo-Feng-Li, 2013):** $\mathrm{PGL}(2, 7)$, $\mathrm{PSL}(3, 3).2$, $\mathrm{M}_{12}.2$, $\mathrm{G}_2(3).2$;
- 5度**(Guo-Feng-Li, 2015):** $\mathrm{J}_3.2$, $\mathrm{PSL}(2, p)$, $\mathrm{PGL}(2, p)$, $\mathrm{PSL}(3, 4).\mathrm{D}_{12}$, $\mathrm{PSp}(4, 4).4$.

O'Nan-Scott定理与边本原图

定理 (Giudici-Li, 2010)

设$\Gamma = (V, E)$是度数不小于3的G-边本原图，且非完全二部图.

定理 (Giudici-Li, 2010)

设$\Gamma = (V, E)$是度数不小于3的G-边本原图, 且非完全二部图. 那么

- G^E的O'Nan-Scott类型为SD, CD, PA和AS 之一;

定理 (Giudici-Li, 2010)

设$\Gamma = (V, E)$是度数不小于3的G-边本原图，且非完全二部图. 那么

- G^E的O'Nan-Scott类型为SD, CD, PA和AS 之一;
- 对于SD和CD, 则Γ是二部图且G^+在每部分上都是CD型的拟本原置换群;

定理 (Giudici-Li, 2010)

设$\Gamma = (V, E)$是度数不小于3的G-边本原图，且非完全二部图. 那么

- G^E的O'Nan-Scott类型为SD, CD, PA和AS 之一;
- 对于SD和CD, 则Γ是二部图且G^+在每部分上都是CD型的拟本原置换群;
- 对于PA和AS, 则G^V（或G^+在每部分上）拟本原且与G^E有相同的O'Nan-Scott类型.

定理 (Giudici-Li, 2010)

设$\Gamma=(V,E)$是度数不小于3的G-边本原图，且非完全二部图. 那么

- G^E的O'Nan-Scott类型为SD, CD, PA和AS 之一;
- 对于SD和CD, 则Γ是二部图且G^+在每部分上都是CD型的拟本原置换群;
- 对于PA和AS, 则G^V（或G^+在每部分上）拟本原且与G^E有相同的O'Nan-Scott类型.

观察

所有已知的度数不小于3的2-弧传递边本原图（非完全二部图）具有几乎单的自同构群.

定理 (Giudici-Li, 2010)

设$\Gamma = (V, E)$是度数不小于3的G-边本原图，且非完全二部图. 那么

- G^E的O'Nan-Scott类型为SD, CD, PA和AS 之一;
- 对于SD和CD, 则Γ是二部图且G^+在每部分上都是CD型的拟本原置换群;
- 对于PA和AS, 则G^V（或G^+在每部分上）拟本原且与G^E有相同的O'Nan-Scott类型.

观察

所有已知的度数不小于3的2-弧传递边本原图（非完全二部图）具有几乎单的自同构群.

引理 (Lu, ?)

设$\Gamma = (V, E)$是度数不小于3的$(G, 2)$-弧传递图，且G^E是本原的. 若$\Gamma \ncong \mathrm{K}_{d,d}$,

则G^E的O'Nan-Scott类型是PA或AS,

定理 (Giudici-Li, 2010)

设$\Gamma = (V, E)$是度数不小于3的G-边本原图，且非完全二部图. 那么

- G^E的O'Nan-Scott类型为SD, CD, PA和AS 之一;
- 对于SD和CD, 则Γ是二部图且G^+在每部分上都是CD型的拟本原置换群;
- 对于PA和AS, 则G^V（或G^+在每部分上）拟本原且与G^E有相同的O'Nan-Scott类型.

观察

所有已知的度数不小于3的2-弧传递边本原图（非完全二部图）具有几乎单的自同构群.

引理 (Lu, ?)

设$\Gamma = (V, E)$是度数不小于3的$(G, 2)$-弧传递图，且G^E是本原的. 若$\Gamma \not\cong \mathsf{K}_{d,d}$,

则G^E的O'Nan-Scott类型是PA或AS, 且下列之一成立:

- G^V是拟本原的，且与G^E有相同类型;

定理 (Giudici-Li, 2010)

设$\Gamma = (V, E)$是度数不小于3的G-边本原图，且非完全二部图. 那么

- G^E的O'Nan-Scott类型为SD, CD, PA和AS 之一;
- 对于SD和CD, 则Γ是二部图且G^+在每部分上都是CD型的拟本原置换群;
- 对于PA和AS, 则G^V（或G^+在每部分上）拟本原且与G^E有相同的O'Nan-Scott类型.

观察

所有已知的度数不小于3的2-弧传递边本原图（非完全二部图）具有几乎单的自同构群.

引理 (Lu, ?)

设$\Gamma = (V, E)$是度数不小于3的$(G, 2)$-弧传递图，且G^E是本原的. 若$\Gamma \ncong \mathrm{K}_{d,d}$,
则G^E的O'Nan-Scott类型是PA或AS, 且下列之一成立:

- G^V是拟本原的，且与G^E有相同类型;
- G^+在每部分上都是拟本原的，且与G^E 有相同的类型.

二弧传递的边本原图

二弧传递的边本原图

设$\Gamma = (V, E)$是d度$(G, 2)$-弧传递图, $d \geq 3$, G^E 是本原的. 进而设$\Gamma \ncong \mathsf{K}_{d,d}$, 于是$G^E$的类型为AS或PA. 令$M = \mathsf{soc}(G) := T_1 \times \cdots \times T_k$.

二弧传递的边本原图

设$\Gamma = (V, E)$是d度$(G, 2)$-弧传递图, $d \geq 3$, G^E 是本原的. 进而设$\Gamma \ncong \mathsf{K}_{d,d}$, 于是$G^E$的类型为AS或PA. 令$M = \mathrm{soc}(G) := T_1 \times \cdots \times T_k$. $(T_i)_u \neq 1$, $\{u, v\} \in E$.

二弧传递的边本原图

设$\Gamma = (V, E)$是d度$(G, 2)$-弧传递图, $d \geq 3$, G^E 是本原的. 进而设$\Gamma \ncong \mathsf{K}_{d,d}$, 于是$G^E$的类型为AS或PA. 令$M = \mathrm{soc}(G) := T_1 \times \cdots \times T_k$. $(T_i)_u \neq 1$, $\{u, v\} \in E$. $M_u \neq 1$, $G_{\{u,v\}}$非交换.

二弧传递的边本原图

设$\Gamma = (V, E)$是d度$(G, 2)$-弧传递图, $d \geq 3$, G^E 是本原的. 进而设$\Gamma \ncong \mathrm{K}_{d,d}$, 于是$G^E$的类型为AS或PA. 令$M = \mathrm{soc}(G) := T_1 \times \cdots \times T_k$. $(T_i)_u \neq 1$, $\{u, v\} \in E$. $M_u \neq 1$, $G_{\{u,v\}}$非交换.

引理

$M_{\{u,v\}}$非交换. 若G_{uv}是交换的, 则$\mathrm{soc}(G) \cong \mathrm{PSL}(2, q)$且$\Gamma \cong \mathrm{K}_{q+1}$,
或$\mathrm{soc}(G) = \mathrm{Sz}(q)$且$\mathrm{Aut}\Gamma = \mathrm{Aut}(\mathrm{Sz}(q))$; 两种情形均有$d = q$.

二弧传递的边本原图

设$\Gamma = (V, E)$是d度$(G, 2)$-弧传递图, $d \geq 3$, G^E 是本原的. 进而设$\Gamma \ncong \mathsf{K}_{d,d}$, 于是$G^E$的类型为AS或PA. 令$M = \mathsf{soc}(G) := T_1 \times \cdots \times T_k$. $(T_i)_u \neq 1$, $\{u, v\} \in E$. $M_u \neq 1$, $G_{\{u,v\}}$非交换.

引理

$M_{\{u,v\}}$非交换. 若G_{uv}是交换的, 则$\mathsf{soc}(G) \cong \mathrm{PSL}(2, q)$且$\Gamma \cong \mathsf{K}_{q+1}$,
或$\mathsf{soc}(G) = \mathrm{Sz}(q)$且$\mathsf{Aut}\Gamma = \mathsf{Aut}(\mathrm{Sz}(q))$; 两种情形均有$d = q$.

注意$G_u^{\Gamma(u)}$是2-传递的, $1 \neq M_u^{\Gamma(u)} \trianglelefteq G_u^{\Gamma(u)}$.

二弧传递的边本原图

设$\Gamma = (V,E)$是d度$(G,2)$-弧传递图, $d \geq 3$, G^E 是本原的. 进而设$\Gamma \ncong \mathrm{K}_{d,d}$, 于是$G^E$的类型为AS或PA. 令$M = \mathrm{soc}(G) := T_1 \times \cdots \times T_k$. $(T_i)_u \neq 1$, $\{u,v\} \in E$. $M_u \neq 1$, $G_{\{u,v\}}$非交换.

引理

$M_{\{u,v\}}$非交换. 若G_{uv}是交换的, 则$\mathrm{soc}(G) \cong \mathrm{PSL}(2,q)$且$\Gamma \cong \mathrm{K}_{q+1}$, 或$\mathrm{soc}(G) = \mathrm{Sz}(q)$且$\mathrm{Aut}\Gamma = \mathrm{Aut}(\mathrm{Sz}(q))$; 两种情形均有$d = q$.

注意$G_u^{\Gamma(u)}$是2-传递的, $1 \neq M_u^{\Gamma(u)} \trianglelefteq G_u^{\Gamma(u)}$.

引理

若$G_u^{\Gamma(u)}$是几乎单的, 则$M_u^{\Gamma(u)}$是2-传递的.

二弧传递的边本原图

设$\Gamma = (V, E)$是d度$(G, 2)$-弧传递图, $d \geq 3$, G^E 是本原的. 进而设$\Gamma \ncong \mathsf{K}_{d,d}$, 于是$G^E$的类型为AS或PA. 令$M = \mathsf{soc}(G) := T_1 \times \cdots \times T_k$. $(T_i)_u \neq 1$, $\{u, v\} \in E$. $M_u \neq 1$, $G_{\{u,v\}}$非交换.

引理

$M_{\{u,v\}}$非交换. 若G_{uv}是交换的, 则$\mathsf{soc}(G) \cong \mathrm{PSL}(2, q)$且$\Gamma \cong \mathsf{K}_{q+1}$, 或$\mathsf{soc}(G) = \mathrm{Sz}(q)$且$\mathsf{Aut}\Gamma = \mathsf{Aut}(\mathrm{Sz}(q))$; 两种情形均有$d = q$.

注意$G_u^{\Gamma(u)}$是2-传递的, $1 \neq M_u^{\Gamma(u)} \trianglelefteq G_u^{\Gamma(u)}$.

引理

若$G_u^{\Gamma(u)}$是几乎单的, 则$M_u^{\Gamma(u)}$是2-传递的.

若$G_u^{\Gamma(u)}$是仿射型的且$M_u^{\Gamma(u)}$是非本原的, 则$M_u^{\Gamma(u)}$是可解的*Frobenius*群, $M_{uv}^{\Gamma(u)} = \mathbb{Z}_e$, 且或$G_{uv}^{\Gamma(u)} \leq \Gamma\mathrm{L}(1, q)$或$M_{uv}^{\Gamma(u)} \leq \mathbf{Z}(G_{uv}^{\Gamma(u)})$, 其中$q$不是素数.

二弧传递的边本原图

设$\Gamma = (V, E)$是d度$(G, 2)$-弧传递图, $d \geq 3$, G^E 是本原的. 进而设$\Gamma \ncong \mathrm{K}_{d,d}$, 于是$G^E$的类型为AS或PA. 令$M = \mathrm{soc}(G) := T_1 \times \cdots \times T_k$. $(T_i)_u \neq 1$, $\{u, v\} \in E$. $M_u \neq 1$, $G_{\{u,v\}}$非交换.

引理

$M_{\{u,v\}}$非交换. 若G_{uv}是交换的, 则$\mathrm{soc}(G) \cong \mathrm{PSL}(2, q)$且$\Gamma \cong \mathrm{K}_{q+1}$,
或$\mathrm{soc}(G) = \mathrm{Sz}(q)$且$\mathrm{Aut}\Gamma = \mathrm{Aut}(\mathrm{Sz}(q))$; 两种情形均有$d = q$.

注意$G_u^{\Gamma(u)}$是2-传递的, $1 \neq M_u^{\Gamma(u)} \trianglelefteq G_u^{\Gamma(u)}$.

引理

若$G_u^{\Gamma(u)}$是几乎单的, 则$M_u^{\Gamma(u)}$是2-传递的.
若$G_u^{\Gamma(u)}$是仿射型的且$M_u^{\Gamma(u)}$是非本原的, 则$M_u^{\Gamma(u)}$是可解的*Frobenius*群, $M_{uv}^{\Gamma(u)} = \mathbb{Z}_e$, 且
或$G_{uv}^{\Gamma(u)} \leq \Gamma\mathrm{L}(1, q)$或$M_{uv}^{\Gamma(u)} \leq \mathbf{Z}(G_{uv}^{\Gamma(u)})$, 其中$q$不是素数.

两种情形:

$M_u^{\Gamma(u)}$本原: $\Longrightarrow$

T_i传递$\Longrightarrow k = 1$.

二弧传递的边本原图

设$\Gamma = (V, E)$是d度$(G, 2)$-弧传递图, $d \geq 3$, G^E 是本原的. 进而设$\Gamma \ncong \mathsf{K}_{d,d}$, 于是$G^E$的类型为AS或PA. 令$M = \mathrm{soc}(G) := T_1 \times \cdots \times T_k$. $(T_i)_u \neq 1$, $\{u, v\} \in E$. $M_u \neq 1$, $G_{\{u,v\}}$非交换.

引理

$M_{\{u,v\}}$非交换. 若G_{uv}是交换的, 则$\mathrm{soc}(G) \cong \mathrm{PSL}(2, q)$且$\Gamma \cong \mathsf{K}_{q+1}$,
或$\mathrm{soc}(G) = \mathrm{Sz}(q)$且$\mathrm{Aut}\Gamma = \mathrm{Aut}(\mathrm{Sz}(q))$; 两种情形均有$d = q$.

注意$G_u^{\Gamma(u)}$是2-传递的, $1 \neq M_u^{\Gamma(u)} \trianglelefteq G_u^{\Gamma(u)}$.

引理

若$G_u^{\Gamma(u)}$是几乎单的, 则$M_u^{\Gamma(u)}$是2-传递的.
若$G_u^{\Gamma(u)}$是仿射型的且$M_u^{\Gamma(u)}$是非本原的, 则$M_u^{\Gamma(u)}$是可解的*Frobenius*群, $M_{uv}^{\Gamma(u)} = \mathbb{Z}_e$, 且
或$G_{uv}^{\Gamma(u)} \leq \Gamma\mathrm{L}(1, q)$或$M_{uv}^{\Gamma(u)} \leq \mathbf{Z}(G_{uv}^{\Gamma(u)})$, 其中$q$不是素数.

两种情形:

$M_u^{\Gamma(u)}$本原: $\Longrightarrow$
T_i传递$\Longrightarrow k = 1$.

$M_u^{\Gamma(u)}$非本原: $\Longrightarrow M_{uv} \leq \mathbb{Z}_e \times \mathbb{Z}_e$, e不是2的方幂. 考察M的Sylow-子群$\Longrightarrow k \leq 2$. 若$k = 2$, 则$(T_1)_u = 1$, 矛盾.
$\Longrightarrow k = 1$.

二弧传递的边本原图

设$\Gamma = (V, E)$是d度$(G, 2)$-弧传递图, $d \geq 3$, G^E 是本原的. 进而设$\Gamma \ncong \mathsf{K}_{d,d}$, 于是$G^E$的类型为AS或PA. 令$M = \mathrm{soc}(G) := T_1 \times \cdots \times T_k$. $(T_i)_u \neq 1$, $\{u, v\} \in E$. $M_u \neq 1$, $G_{\{u,v\}}$非交换.

引理

$M_{\{u,v\}}$非交换. 若G_{uv}是交换的, 则$\mathrm{soc}(G) \cong \mathrm{PSL}(2, q)$且$\Gamma \cong \mathsf{K}_{q+1}$, 或$\mathrm{soc}(G) = \mathrm{Sz}(q)$且$\mathrm{Aut}\Gamma = \mathrm{Aut}(\mathrm{Sz}(q))$; 两种情形均有$d = q$.

注意$G_u^{\Gamma(u)}$是2-传递的, $1 \neq M_u^{\Gamma(u)} \trianglelefteq G_u^{\Gamma(u)}$.

引理

若$G_u^{\Gamma(u)}$是几乎单的, 则$M_u^{\Gamma(u)}$是2-传递的.

若$G_u^{\Gamma(u)}$是仿射型的且$M_u^{\Gamma(u)}$是非本原的, 则$M_u^{\Gamma(u)}$是可解的*Frobenius*群, $M_{uv}^{\Gamma(u)} = \mathbb{Z}_e$, 且或$G_{uv}^{\Gamma(u)} \leq \Gamma\mathrm{L}(1, q)$或$M_{uv}^{\Gamma(u)} \leq \mathbf{Z}(G_{uv}^{\Gamma(u)})$, 其中$q$不是素数.

两种情形:

$M_u^{\Gamma(u)}$本原: $\Longrightarrow$ T_i传递$\Longrightarrow k = 1$.

$M_u^{\Gamma(u)}$非本原: $\Longrightarrow M_{uv} \leq \mathbb{Z}_e \times \mathbb{Z}_e$, e不是2的方幂. 考察M的Sylow-子群$\Longrightarrow k \leq 2$. 若$k = 2$, 则$(T_1)_u = 1$, 矛盾. $\Longrightarrow k = 1$.

定理

若Γ是非圈非完全二部的2-弧传递边本原图, 则$\mathrm{Aut}\Gamma$是几乎单群.

谢　谢！