Lecture 10. Analysis of Variance (ANOVA): One-Way Layout

Introduction

• 如果是對兩個 population 的 mean（是否相等）有興趣，則在觀察值是 normal (Gaussian) distribution (或即 population 是 normal distb.)的假設下，可以用 **t 分佈**（t distribution）或 **t-test** 來看兩個 mean 是否相等，並且還可以區分兩種情況：一是兩群 observation 獨立時；另一個是兩群 observation 分別是同一群人在兩種 ”情況” 下的觀測值 [比如：前測和後測，吃藥前和吃藥後，intervention 之前後，….](paired comparison, paired t-test.)。

• 如果是對**三個或三個以上**的 population 的 mean 有興趣，想要看看這些 mean 是否相等，則用**變異數分析**（**ANOVA**）。

Example

A、B、C 三種藥被用來試驗是否能降低膽固醇。一般的問題是：這三種藥的(平均) ”效用”（efficacy）是否都一樣？假設現在有一群人，有男有女，年齡從 40 歲到 70 歲不等，我們將這群人”隨機地”分派（**random allocation**）成三組 **[Q1]**，然後讓這三組人分別服用 A、B、C 三種藥，並測量他們膽固醇降低的量，看看這三組人的 ”平均降低量” 是否一樣？

關於 Q1：On randomization

• 目的：在於避免因人為的偏好或隨意性，而將具有某種傾向的人分派到某一組、將相反傾向的人分派到另一組，這樣會產生 **bias**。比如，如果將男生大部份分去吃 A 藥，而女生大部份分去吃 B 或 C 藥，那麼 $(X_{11},\cdots,X_{1n_1})$、$(X_{21},\cdots,X_{2n_2})$、$(X_{31},\cdots,X_{3n_3})$ 的平均值如果有差異的話，可能不是來自藥，而是來自性別；相反的，若藥本身會造成差異，但這個差異卻被性別的差異中和掉了，結果可能就變成”沒有差異”。

• 結果：

應該會看到**性別和年齡的分佈在三組人都差不多**。

• 如果說：雖然經過隨機分派，但性別或年齡的分佈在三組人中相差很多 [例如：男生大多被分到 A 組，而女生大部份被分到 B 或 C 組]，這種情況是可能發生的。

Source of variation

• 對於同一個人，當他/她被指定服用 A 藥、B 藥或 C 藥時，他的降低量 X 會有所變異，**這個變異是來自於藥**。對於同樣服用 A 藥（或 B、C）的幾個人而言，他們的 X 也會有所變異，而這種變異是**來自於人的變異**；其成因可能很複雜，可能是來自**身體結構**、**遺傳因子**、…等等。

• 因此，要評估 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$，就是要評估不同的藥是否造成變異！而且，在評估的同時，又必須 **”排除” 掉來自於人的變異**。

Data frame

$$\left.\begin{array}{llll} X_{11}, & X_{12}, & \ldots\ldots, & X_{1n_1} \\ X_{21}, & X_{22}, & \ldots\ldots, & X_{2n_2} \\ X_{31}, & X_{32}, & \ldots\ldots, & X_{3n_3} \end{array}\right\}$$

Assumption

X_{ij} 分別代表這三組人的降低量，並且假設

第 1 組人（服 A 藥）的 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$，

第 2 組人（服 B 藥）的 $X \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，

第 3 組人（服 C 藥）的 $X \sim N(\mu_3, \sigma^2)$ **[Q2]**

Hypothesis

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ **(null hypothesis)** **vs.**

$H_a : \mu_i \neq \mu_j$，**for some i, j. (alternative hypothesis)**

(意即，這三個 mean 當中，至少有兩個不相等！)

Procedure

- **To construct a testing statistic**
- **Under H_0, the sampling distribution of the statistic**
- **level of significance, α**
- **critical region, or rejection region**
- 根據 **data** 計算你的 **statistic** 的實現值（**realization**）
  看這個 **realization** 是否落在 **critical region** C_α 中，
  決定是否拒絕 H_0

The Completely Randomized Design:

one-way layout

Assumption and Hypotheses

假設有 k 個群體分別代表接受 k 種 treatment 後，某個 measurement 的分佈，設觀察值為 X_{ij}，$i = 1,\ldots,k$，$j = 1,\ldots,n_i$

並且 $X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $\forall i$ 。我們想檢定

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \quad \text{versus}$$

$$H_a : \mu_i \neq \mu_j, \quad \text{for some } i, j.$$

Data frame (資料架構)

$$\sum n_i = \mathrm{N} \; ; \; T_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

$$T_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{k} T_{i\bullet} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

$$\bar{X}_{i\bullet} = \frac{T_{i\bullet}}{n_i} \; ; \; \bar{X}_{\bullet\bullet} = \frac{T_{\bullet\bullet}}{\mathrm{N}}$$

	Treatment			
	1	2	………	k
	X_{11}	X_{21}	………	X_{k1}
	X_{12}	X_{22}	………	X_{k2}
	$\vdots$	$\vdots$	………	$\vdots$
	X_{1n_1}	X_{2n_2}	………	X_{kn_k}
Sample size	n_1	n_2	………	n_k
Total	$T_{1\bullet}$	$T_{2\bullet}$	………	$T_{k\bullet}$
Mean	$\bar{X}_{1\bullet}$	$\bar{X}_{2\bullet}$	………	$\bar{X}_{k\bullet}$

Heuristics

(A) $\left(\overline{X}_{i\bullet}-\overline{X}_{\bullet\bullet}\right)^2$ 代表第 i 組人與共同的 mean ($\mu_1=\cdots=\mu_k=\mu$)間之變異，把這些變異加起來，代表組與組間之變異，**這個變異值是用來衡量 data "不遵守 H_0" 的程度**。

(B) $(X_{ij}-\overline{X}_{i\bullet})^2$ 代表第 i 組內部的每個人與該 mean 之變異程度，把所有人、所有的組的這個變異值加起來，用以衡量同一個 treatment 內部的差異。

(C)要衡量 treatment 間的差異（變異來源是 treatment），要用一個 "標準" 去衡量，這個標準便是 treatment 內不同 observation（來自 individual）的差異。

Illustration:

(a)

```
                    μ1
                    ↓
x----- x---x---x---x------x-----------x------------   ← group 1
 ---x--------------x--------------x-x-x---x---------   ← group 2
                                  ↑
                                  μ2
```

mean μ_1 & μ_2 不一樣，variance（散佈的情形差不多），但很難從 data（打 xxx 的部份）判斷兩個 group means 是否一樣。

(b)

```
                    μ1
                    ↓
-------x----x--x----x-----x--------------------------   ← group 1
 ----------------------------xxxx----x------x--------   ← group 2
                                  ↑
                                  μ2
```

mean μ_1 & μ_2 不一樣，variance 差不多，但兩組的 variance 比(a)中的縮小了，從 data 較能肯定兩個 group means （μ_1 & μ_2）有差別！

Sum of squares

大致上，$\overline{X}_{i\bullet}$ 是用來代表 μ_i 的。在

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \equiv \mu$ 成立的情況下，

用 $\overline{X}_{\bullet\bullet}$ 代表 μ。於是，我們考慮以下兩個量：

組間變異（among-group sum of squares）（ASS）

$$\left(\overline{X}_{1\bullet} - \overline{X}_{\bullet\bullet}\right)^2 + \left(\overline{X}_{2\bullet} - \overline{X}_{\bullet\bullet}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\overline{X}_{k\bullet} - \overline{X}_{\bullet\bullet}\right)^2$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

n_1 個 n_2 個 …… n_k 個

組內變異（within-group sum of squares）（WSS）

$$\sum_{j=1}^{n_1}(X_{1j} - \overline{X}_{1\bullet})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(X_{2j} - \overline{X}_{2\bullet})^2 + \ldots + \sum_{j=1}^{n_k}(X_{kj} - \overline{X}_{k\bullet})^2$$

Decomposition of Sum of Squares

總變異量（Total sum of squares (TSS)）：

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_{\bullet\bullet})^2 \equiv TSS}$$

這個 TSS 可以做如下之分解（decomposition）：

$$\begin{aligned} TSS &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet}+\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet\bullet})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\{(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet})^2+2(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet})(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet\bullet})+(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet\bullet})^2\} \\ &= (1)+(2)+(3) \end{aligned}$$

It can be easily shown that the (2)-term is zero, and so the TSS reduces to:

$$\begin{aligned} TSS &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet\bullet})^2 \\ &= WSS+\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet\bullet})^2 \\ &= WSS+ASS \end{aligned}$$

where WSS=within-group sum of squares

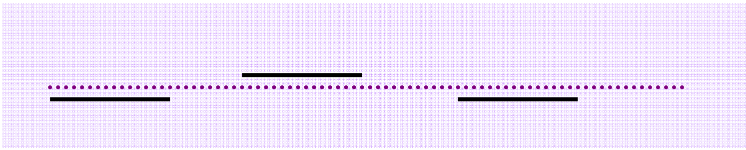
ASS=among-group sum of squares

Behavior of the Sum of Squares under Null

當 ***H_0* 錯**時，ASS 會增大，理由是

$$\text{ASS} = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_{i\bullet} - \bar{X}_{\bullet\bullet})^2$$

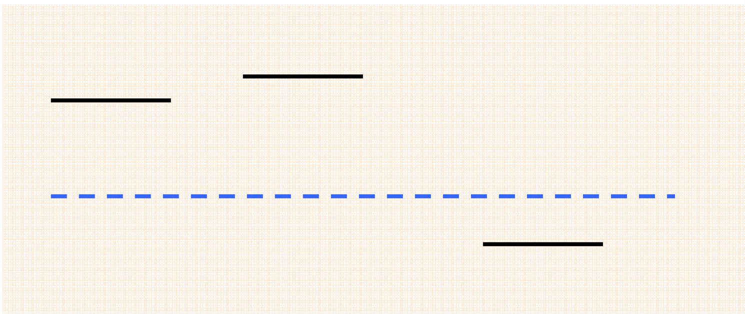
如果 ***H_0* 對**時，則 $\bar{X}_{i\bullet}$ 和 $\bar{X}_{\bullet\bullet}$ 都會和 **μ** 很接近（$\mu_i = \mu$），



但如果 ***H_0* 錯**，$\bar{X}_{i\bullet}$ 和 μ_i 很接近，$\bar{X}_{\bullet\bullet}$ 和 μ 很接近

（這時代表 combined sample 背後的那個 population mean），

而 $\mu_i \neq \mu$，故 ASS 會↗。



Test Statistic：two estimates for σ^2 (☆)

(i) 對第 i 組 data，$X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$，以 $\overline{X}_{i\bullet}$ 代替 μ_i，則

$$\sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X}_{i\bullet})^2 \Big/ (n_i - 1)$$ 可用以估計 σ^2。

故而考慮 i=1,2,…,k 這 k 組 data（全部的 data），我們可以用以下的 combined sample 所構成之統計量來估計 σ^2：

$$\text{Use } \frac{\Sigma_{i=1}^{k}\{\Sigma_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_{i\bullet})^2\}}{\Sigma_{i=1}^{k}(n_i - 1)} \text{ to estimate } \sigma^2$$

(ii) (a) 為了簡化問題，設 $n_i = n, \quad \forall i$。則

$$\bar{X}_{i\bullet} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Longrightarrow \sqrt{n}\bar{X}_{i\bullet} \sim N(\sqrt{n}\mu, \sigma^2)$$

$$\Longrightarrow \frac{\Sigma_{i=1}^{k}(\sqrt{n}\bar{X}_{i\bullet} - \frac{\Sigma_{i=1}^{k}[\sqrt{n}\bar{X}_{i\bullet}]}{k})^2}{k-1}$$

是 σ^2 的 unbiased estimator。

但 $$\sum_{i=1}^{k} \sqrt{n}\overline{X}_{i\bullet} / k = \sqrt{n}(\sum_{i=1}^{k} \overline{X}_{i\bullet} / k) = \sqrt{n}\overline{X}_{\bullet\bullet}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{k} n(\overline{X}_{i\bullet} - \overline{X}_{\bullet\bullet})^2 \Big/ (k-1)$$ 可用以 estimate σ^2。

(b) 設 n_i 不全部相等，則對(a)之一個修正為

$$\sum_{i=1}^{k} n_i (\overline{X}_{i\bullet} - \overline{X}_{\bullet\bullet})^2 \Big/ (k-1)$$ **[Q3]**

(c) 關於 **Q3**：

這個修正雖然頗為直覺，但背後需要一個較煩雜的計算和定理（跟 chi-square 的 decomposition 有關之定理），在此從略。

在(i)中，我們可以得到

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}[\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_{i\bullet})^2]}{\sigma^2} \sim \chi^2{}_{\upsilon}, \upsilon=\sum_{i=1}^{k}n_i-k \quad \text{(df)}$$

在(ii)中，可以得到

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(\overline{X}_{i\bullet}-\overline{X}_{\bullet\bullet})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu}, \qquad \nu=k-1 \quad \text{(df)}$$

Conclusion

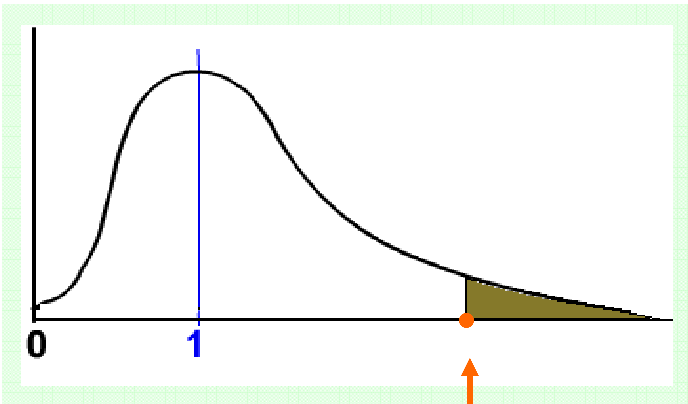
We have the following F-statistic:

$$\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet\bullet})^2}{\sigma^2}\Big/ k-1}{\dfrac{\sum_{i=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet})^2\right]}{\sigma^2}\Big/ \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet\bullet})^2}{k-1}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet})^2\right]}{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)}}$$

$$\sim F_{k-1,\ n-k}$$ (R.A. Fisher)

$$\because\ \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=\sum_{i=1}^{k}n_i-k=n-k, \quad \text{as} \quad n=\sum_{i=1}^{k}n_i$$

- 當 H_0 錯時，分子將增大（↗）
- **F distributions:**

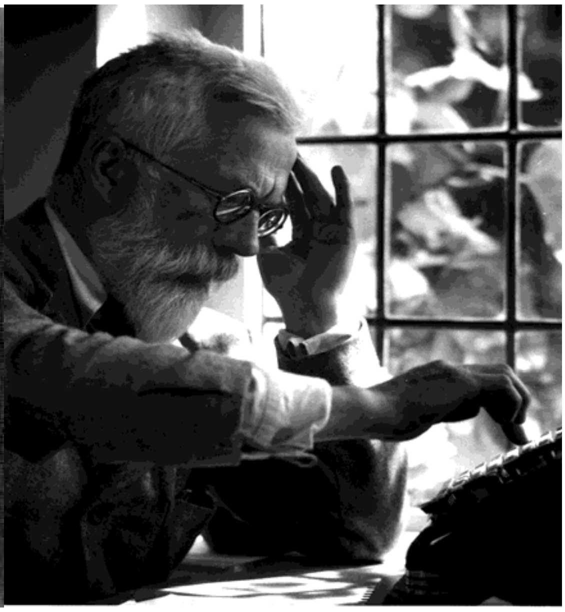


$\mathbf{F_{a,b;\,\alpha}}$

ANOVA Table of one-way layout

Source of variation	Sum of squares	Degrees of freedom	Mean square	Variance ratio
Among samples	ASS	k - 1	ASS/(k-1) ----(1)	$\frac{(1)}{(2)}$
Within samples	WSS	N - k	WSS/(N-k) ---(2)	
Total	TSS=ASS+WSS	N-1		

Sir R. A. Fisher:



Example of SAS coding

```
DATA oneway;
   INPUT TRTMENT $ weight @@;
   CARDS;
A  336  A  346  A  269  A  323  A  309  A  276  A  306  A  310
B  328  B  315  B  343  B  368  B  353  B  374  B  356  B  339
C  304  C  292  C  299  C  293  C  277  C  303  C  320  C  324
;
 PROC ANOVA;
   CLASS TRTMENT;
   MODEL WEIGHT=TRTMENT;
   TITLE 'ONE-WAY ANOVA';
 RUN;
proc univariate normal plot;
 var weight;
 by trtment;
run;
```

SAS output

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	2	9461.08333	4730.54167	10.60	0.0007
Error	21	9369.87500	446.18452		
Corrected Total	23	18830.95833			

R-Square	Coeff Var	Root MSE	weight Mean
0.502422	6.615607	21.12308	319.2917

Source	DF	Anova SS	Mean Square	F Value	Pr > F
TRTMENT	2	9461.083333	4730.541667	10.60	0.0007

On the Degrees of Freedom (☆)

考慮這個量：$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^2$，叫做 “total sum of squares” about the origin ‘zero’；對照 $TSS = \sum\sum (X_{ij} - \bar{X}_{\bullet\bullet})^2$，叫做 total sum of squares due to average。我們把後一項仍記為 *TSS*，而把前一項記為 TSS_0。

則 $TSS_0 \equiv \sum_i\sum_j X_{ij}^2 = \sum_i\sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{\bullet\bullet} + \bar{X}_{\bullet\bullet})^2$

$$= \sum_i\sum_j \bar{X}_{\bullet\bullet}^2 + \sum_i\sum_j 2\bar{X}_{\bullet\bullet}(X_{ij} - \bar{X}_{\bullet\bullet}) + \sum_i\sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{\bullet\bullet})^2$$

$$= n\bar{X}_{\bullet\bullet} + \quad 0 \quad + \sum_i\sum_j (X_{ij} - \bar{X}_{\bullet\bullet})^2$$

$$= n\bar{X}_{\bullet\bullet} + TSS$$

$$d.f.\,(TSS_0) = \quad n \quad = \quad 1 \quad + (n-1)$$

$\bar{X}_{\bullet\bullet}$分掉一個 *d.f.*，而 *TSS* 只剩（n – 1）個 *d.f.*。

Statistical model and H_0 (☆)

Observations X_{ij} 可以由 treatment 貢獻，加上一個 error term，寫成：

$$\begin{cases} X_{ij} = \mu + \tau_i + e_{ij} \\ i = 1,\ 2, \cdots,\ k; \quad j = 1,\ 2, \cdots,\ n_i \end{cases}$$

Treatment mean 即 $\mu + \tau_i$，μ 是一個 unknown 的平均數 (參數)。由於是 **unknown**，所以 τ_i 有以下之 constraint：

$$\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0,$$

如果不是 0，則多出來的部份可以歸於 μ，這兩者(指多出來不等於 0 的部份與 μ)無法分辨，所以必須讓 $\sum \tau_i = 0$。

令 $\mu_i = \mu + \tau_i$，所以 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = \mu$ 即可以寫成 $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k = 0$；而 alternative hypothesis 即改為 $H_a: \tau_i \neq 0$， for some i。

Appendix 1: On Multiple Comparisons (☆)

- 前面的假說（hypothesis）都只是在看“μ_i是否都相等 ”(H_0)。當 H_0被拒絕(rejected) 時，表示**至少有兩組的 mean 不相等**。但到底是哪兩組或哪些組不相等，**須進行多重比較程序(multiple comparison)**。對於 multiple comparison，文獻上有很多討論，在此從略，其中最著名的幾種方法是：

  (1) Duncan's method,

  (2) Dunnet's method,

  (3) Tukey's method,

  (4) Bonferroni's method

- **General comment:**
- **On Bonferroni's method**

但 null hypothesis 也可以改成：『任兩組均相等』， 即

$H_0 : \mu_i = \mu_j$， for all pairs with i≠j, i,j= 1, 2,…, k。

此時，共有 $_{\mathbf{k}}C_2$=k!/2!(k-2)! 種組合要做比較。

Bonferroni's correction for the α–level (**type I error**) for each comparisons is: $\boldsymbol{\alpha^* = \alpha \div {}_kC_2}$

☆ SAS code example and output:

☆ Appendix 2: Chi-square distributions

- **$\chi_1^2 = z^2$; z is a normal variate;**
- **sum of several independent χ_1^2 ;**
- **functional (distributional) form ;**
- **gamma function and gamma distributions.**

Lecture 10. Analysis of Variance (II)：

The Randomized Complete Block Design and Two-Way ANOVA

Introduction

以前面的例子而言，假設 A、B、C 三組人中有男有女，有各種年齡，我們並不考慮 sex 與 age 對 treatment means 的影響，而只要求在做 randomization 後，sex 與 age 在 A、B、C 三組中的分佈情形差不多。

現在，先不談 sex，先談 age，事實上我們在探討 treatment means 是否一樣時，是可以考慮將 age 的效果（影響）摒除掉的，這時你的 randomization 必須如此進行：
先將 age 分群，比如 40~50 歲一組，50~60 歲一組，60~70 歲一組，……，針對不同的 age 的組別的 individual，再將他們隨機指派(randomly assign) 到不同的 treatment。

若前面的 outcome 是受 treatment 的影響加上一些 error：

outcome = treatment effect + error

則在此，outcome 便是同時受 treatment 與 age 的影響，再加一些 error：

outcome = treatment effect + age error + error

我們的目標便是：在排除了 age effect 之後，看看是否 treatment effect（A、B、C 三藥之 effect）為一致的？

Data

先假設一個簡單的情況，即每一個 treatment，每一個 block（比如前述之 age）都只有一個 observation。

假設總共有 k 個 treatments，m 個 blocks，則觀察值為

$$X_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, m$$

在這裡，還假設每一個 treatment，m 個 blocks 皆存在；而每一個 block，k 個 treatments 也都存在！

下表列出了這些 observations 及其一些統計量：

(Data frame for Two-Way ANOVA)

	Treatment					
Blocks	**1**	**2**	·········	***k***	**Total**	**mean**
1	X_{11}	X_{21}	·········	X_{k1}	$T_{\bullet 1}$	$\bar{X}_{\bullet 1}$
2	X_{12}	X_{22}	·········	X_{k2}	$T_{\bullet 2}$	$\bar{X}_{\bullet 2}$
⋮	⋮	⋮	·········	⋮	⋮	⋮
m	X_{1m}	X_{2m}	·········	X_{km}	$T_{\bullet k}$	$\bar{X}_{\bullet k}$
Total	$T_{1\bullet}$	$T_{2\bullet}$	·········	$T_{k\bullet}$	$T_{\bullet\bullet}$	
Mean	$\bar{X}_{1\bullet}$	$\bar{X}_{2\bullet}$	·········	$\bar{X}_{k\bullet}$		$\bar{X}_{\bullet\bullet}$

Assumptions, Model, and Hypothesis

仿照 one-way anova，將統計模式寫下來：

$$\begin{cases} X_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij}, \quad e_{ij} \sim N(0,\ \sigma^2) \\ \quad \equiv \mu_{ij} + e_{ij} \\ i = 1,\ 2, \cdots,\ k; \quad j = 1,\ 2, \cdots,\ m \end{cases}$$

我們希望檢定的 null hypothesis 便是：

$H_0 : \tau_i = 0, \quad \forall\ i\ (=1,2,\cdots,k)$ vs. alternative hypothesis

H_a :*not all* $\tau_i = 0$

τ_i 代表 treatment effect 之差異，這個差異如果都是 0，則代表諸 treatments 間沒有 effect 之差異，並且這是在“控制”（或“排除”）了 Block effect 之差異（β_j）後而得到的。

但是，在這裡，我們還有另外一個很重要的 assumption，即：treatment 和 block 之間沒有 “interaction”(交互作用)！意即，treatment effect 不會因 block 的不同而不同；同樣，block effect 也不會因 treatment 的不同而有所變化！

Decomposition of Sum of Squares

類似 前面的 argument，我們可以將 Total sum of squares 分解成幾個部份：

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(X_{ij}-\bar{X}_{\bullet\bullet})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet\bullet})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(\bar{X}_{\bullet j}-\bar{X}_{\bullet\bullet})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(X_{ij}-\bar{X}_{i\bullet}-\bar{X}_{\bullet j}+\bar{X}_{\bullet\bullet})^2$$

↓ ↓ ↓

(1) **(2)** **(3)**

這個式子的詳細的 derivation 在此從略。

總之，第(1)項代表來自 treatment 之變異，以 ***TrSS*** 表示；

第(2)項代表來自 block 之變異，以 ***BlSS*** 表示；

第(3)項代表來自 random error 之變異，以 ***ESS*** 表示（residual sum of squares）；因而 Total sum of squares 可以分解成：

TSS* = *TrSS* + *BlSS* + *ESS

- **Test Statistic，d.f. & Statistical Decision**

當 H_0 不對時，$TrSS$ 會↗，$(TrSS/\sigma^2) \sim \chi^2_\nu,\quad \nu = k-1$ ，排除掉 Block 之影響後，我們要比的是 $TrSS$ 對 ESS，而 $ESS \sim \sigma^2 \cdot \chi^2_\nu,\quad \nu = (m-1)(k-1)$ ，則 test statistic 便是

$$\frac{\dfrac{TrSS/\sigma^2}{k-1}}{\dfrac{ESS/\sigma^2}{(m-1)(k-1)}} = \frac{TrSS/(k-1)}{ESS/(m-1)(k-1)} \quad \sim \quad F_{k-1,\ (m-1)(k-1)}$$

根據你的 data (X_{ij} 之 realizations x_{ij})，計算 F 值及其 *p-value*，當 p-value＜ α (significant level)時，則 reject H_0。

Block effect

前面關心的是 treatment effect 是否一樣，同樣的 arguments，

你也可以看看 block effect 是否一樣。這時 null hypothesis vs.

alternative hypothesis 便是 $\begin{cases} H_0^*: \beta_j = 0, & \forall j \\ H_a^*: not \quad all \quad \beta_j = 0 \end{cases}$

檢定統計量可以改成

$$\frac{BlSS/(m-1)}{ESS/(m-1)(k-1)} \quad \sim \quad F_{m-1,\ (m-1)(k-1)}$$

根據 data (realization) 可以決定 reject 或 do not reject $\mathbf{H_0}$。

Notes：

(i) 在 One-Way ANOVA 中，你的問題是各個 treatment 的 mean 是否一樣，意思即是 treatment effect 是否一樣。

(ii) 而在 Two-Way ANOVA 中，我們不說 treatment mean 是否一樣，只說 treatment effect 是否一樣，理由是有 block 的因素存在。

(iii)若再加入另外一個影響因素（比如 8.3.1 中，再考慮“性別”），則變成 **three-way ANOVA**，處理方式和 two-way ANOVA 類似。

(iv)不論 one-way、two-way、three-way ANOVA 的任一方法，事實上我們都可以用 regression 的方式來處理問題，即使有 interaction 存在的情況，regression method 亦相當方便。但仍須注意，ANOVA 分析仍有其重要與必要之處。

(v) 一個 treatment 和一個 block 只有一個 observation 的 assumption 可以取消，擴大成 repeated measurements 的情況。

SAS code and output

```
/* Lecture 14: Two-Way ANOVA   */
data twoway;
 infile
'd:\class\biostat_under_2004\sas_lab\lab07_anova2.dat';
 input blk_mwt $ smk_lvl $ infwt;
   /***************************************/
   /*   blk_mwt: block: mother weight     */
   /*   smk_lvl: smoking status and level */
   /*   infwt: infant birth weight        */
   /***************************************/
 proc anova;
  class smk_lvl blk_mwt;
  model infwt=smk_lvl blk_mwt;
 run;
/*b1  nonsmk    3175
  b1  mildsmk   2750
  b1  heavysmk  1730
  b2  nonsmk    3232
  b2  mildsmk   2835
  b2  heavysmk  2466
  b3  nonsmk    3240
  b3  mildsmk   3062
  b3  heavysmk  2509
  b4  nonsmk    3420
  b4  mildsmk   3076
  b4  heavysmk  2608
  b5  nonsmk    3459
  b5  mildsmk   3340
  b5  heavysmk  2778
  b6  nonsmk    3515
  b6  mildsmk   3416
  b6  heavysmk  2920*/
```

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	7	3240694.056	462956.294	16.66	<.0001
Error	10	277926.889	27792.689		
Corrected Total	17	3518620.944			

R-Square	Coeff Var	Root MSE	infwt Mean
0.921013	5.605733	166.7114	2973.944

Source	DF	Anova SS	Mean Square	F Value	Pr > F
smk_lvl	2	2209320.444	1104660.222	39.75	<.0001
blk_mwt	5	1031373.611	206274.722	7.42	0.0038